



МІНІСТЕРСТВО ТРАНСПОРТУ УКРАЇНИ
Дніпропетровський національний університет
залізничного транспорту імені академіка В.Лазаряна

Кафедра вищої математики

М Е Т О Д И Ч Н І В К А З І В К И
до виконання контрольної роботи № 2 з вищої математики
**«ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ.
ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ»**

Укладачі: Дмитрусенко Н.С.
 Клименко І.В.
 Кравець В.В.
 Наріус Н.Г.

Для студентів усіх спеціальностей
комплексу «технікум – ВНЗ»
заочної форми навчання

Дніпропетровськ 2003

Укладачі: канд. техн. наук, доцент Ніна Степанівна Дмитрусенко
канд. техн. наук, доцент Ірина Володимирівна Клименко
д-р техн. наук, професор Віктор Володимирович Кравець
канд. техн. наук, доцент Надія Григорівна Наріус

УДК 517

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи № 2 з вищої математики «Функції двох змінних. Інтегральне числення. Звичайні диференціальні рівняння» / Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. – Д., 2003. – 30 с.

Перша частина методичних вказівок включає основні означення та формули з указанням розділів підручників та посібників, необхідних для розв'язування кожної задачі. У другій частині міститься зразок виконання контрольної роботи. У третій – варіанти контрольних завдань.

Методичні вказівки розроблені для студентів комплексу «технікум – вищий навчальний заклад (ВНЗ)» заочної форми навчання.

Іл. 6. Бібліогр. 3 найм.

Затверджено на засіданні кафедри.

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. О. М. Кісельова (ДНУ),
канд. фіз.-мат. наук, доц. З. М. Гасанов (ДІТ).

Редактор Т. В. Щепоткіна

Комп'ютерна верстка Т. В. Шевченко

Підписано до друку 09.10.03. Формат 60x84 1/16. Папір для множних апаратів. Ризограф. Ум. друк. арк. 1,7. Обл.-вид. арк. 1,8. Тираж. 200 прим. Зам. № 2904. Вид. № 56. Безкоштовно.

Видавництво Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна

ДК № 1315 від 31.03.03

Адреса видавництва та дільниці оперативної поліграфії:
49010, Дніпропетровськ, вул. Акад. Лазаряна, 2

ОСНОВНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ СТУДЕНТУ ЩОДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Переважною формою навчання студента-заочника є самостійна робота – вивчення матеріалу за підручниками та виконання контрольних робіт.

Вимоги до виконання контрольних робіт

1. Кожна контрольна робота повинна бути виконана в окремому зошиті в клітинку. Необхідно залишати поля шириною 3...4 см для поміток рецензента.
2. У заголовку роботи на обкладинці зошита повинні бути зазначені номер контрольної роботи, назва дисципліни, прізвище та ініціали студента, а також навчальний шифр.
3. Студент повинен повністю виконати всі завдання контрольної роботи із зазначенням варіанта, вказавши його номер із методичних вказівок.
4. Перед виконанням кожного завдання необхідно переписати його умову, замінивши загальні дані конкретними зі свого варіанта.
5. Розв'язок завдань супроводжувати стислими поясненнями. Доцільно вживати при цьому прийняті в математиці позначки та символи.
6. Одержавши прорецензовану роботу, студент повинен виправити помилки, вказані в рецензії.
7. Контрольні роботи, які не відповідають цим вимогам, не перевіряються і повертаються на переоформлення.

Як зразок правильного оформлення та виконання контрольних робіт можна використати наведені в методичних вказівках розв'язання типових варіантів завдань.

Перед виконанням контрольної роботи необхідно вивчити матеріал із вказаних до кожної задачі розділів підручників.

ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ ТА ФОРМУЛИ

1. Частинні похідні

Література:

[1] – § 1...4, § 6; (глава 4, ч. 1);

[2] – § 1...5; (глава 2); § 3; § 7, (глава 2);

[3] – § 5, § 12; (глава 8, ч. 1), § 5...15, (глава 3, ч. 1).

1. Функцію $z = f(x, y)$ називають функцією двох незалежних змінних x та y , а змінні x та y – її аргументами.

Функцію $z = f(x, y)$ можна диференціювати по кожному з аргументів:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$ функції $z = f(x, y)$ по аргументу x – це похідна цієї функції по x , якщо y вважати сталою величиною. Аналогічне означення частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial y}$: похідна функції $z = f(x, y)$ по y , а x приймають за сталу.

Частинні похідні – це функції змінних x і y , тому їх теж можна диференціювати:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Частинні похідні знаходять за правилами диференціювання функції однієї змінної.

2. Найбільше та найменше значення функції $z = f(x, y)$ в області D

Література:

[1] – § 28, § 6 (глава 4, ч. 1);

[2] – § 10, (глава 4); § 5, (глава 3);

[3] – § 17, (глава 8).

Для того щоб знайти найбільше значення функції $z = f(x, y)$ у замкненій області D , необхідно:

а) знайти точки екстремуму всередині області та значення функції в цих точках;

б) знайти точки екстремуму на границі області та значення функції в цих точках;

в) серед знайдених значень функції вибрати найбільше та найменше.

Диференційована функція двох змінних може досягати екстремуму в тих

точках, де її частинні похідні дорівнюють нулю. Такі точки знаходять, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Потім обчислюють значення функції у знайдених точках.

Границя області може складатися з декількох ділянок. На кожній ділянці знаходять екстремум функції.

3. Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування

Література:

[1] – § 1...10, (глава 5, ч. 1);

[2] – § 1...8, (глава 4);

[3] – § 1...13, (глава 10).

Існують такі методи інтегрування.

1. Безпосереднє інтегрування – випадок, коли функцію можна інтегрувати за допомогою таблиці інтегралів. При цьому іноді підінтегральний вираз можна спочатку спростити алгебраїчними або тригонометричними перетвореннями.

При інтегруванні тригонометричних функцій можна використовувати такі формули:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$$

$$\sin nx \times \sin mx = \frac{1}{2} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x];$$

$$\cos nx \times \cos mx = \frac{1}{2} [\cos(n-m)x - \sin(n+m)x];$$

$$\sin nx \times \cos mx = \frac{1}{2} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x].$$

2. Інтегрування через заміну змінної або заміну функції. У цьому випадку слід дотримуватися такого правила: якщо безпосередньо підібрати первісну для підінтегральної функції немає можливості, але відомо, що вона існує, то, зробивши заміну змінної (або функції), можна перейти до табличних інтегралів.

3. Інтегрування частинами здійснюється за формулою

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

При інтегруванні частинами використовують такі правила.

Правило 1. Якщо підінтегральний вираз має вигляд

$$f(x)dx = P_n(x) \cdot \left. \begin{array}{l} \cos x \\ \sin x; \\ \operatorname{tg} x \\ \operatorname{ctg} x \\ a^x \end{array} \right\} dx,$$

то через u позначаємо $P_n(x)$, а все останнє позначаємо через dv . Тут $P_n(x)$ – многочлен n -го степеня.

Правило 2. Якщо підінтегральний вираз має вигляд

$$f(x)dx = \left. \begin{array}{l} \log_a x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ \operatorname{arctg} x \\ \operatorname{arcctg} x \end{array} \right\} \cdot P_n(x)dx,$$

то через u позначаємо функцію $\log_a x$ або $\arcsin x$, або $\arccos x$ і т. ін.

4. Для інтегрування деяких тригонометричних виразів доцільно застосувати **універсальну тригонометричну підстановку** $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, тоді

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

4. Визначений інтеграл. Застосування його до задач геометрії

Література:

[1] – § 12, (глава 6, ч. 1);

[2] – § 3, § 5, (глава 5);

[3] – § 1, § 5, (глава 12);

Площа фігури, яка обмежена неперервною лінією $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$) та прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рис. 1), обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Площа фігури, яка обмежена двома неперервними лініями $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ ($f_1(x) \leq f_2(x)$) та двома прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 2), обчислюється за формулою

$$S = \int_b^a [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

У деяких випадках (рис. 3) зручніше використовувати формулу

$$S = \int_c^d [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)] dy.$$

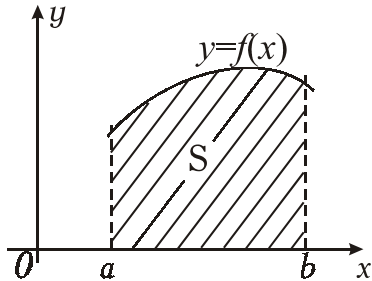


Рис. 1.

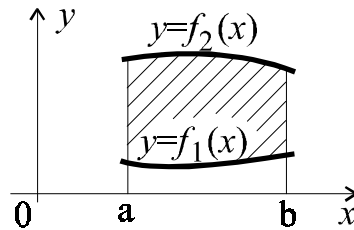


Рис. 2.

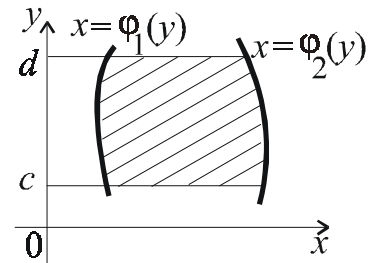


Рис. 3.

Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) (рис. 4), що обертається навколо осі Ox , то об'єм тіла обертання обчислюється за формулою

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

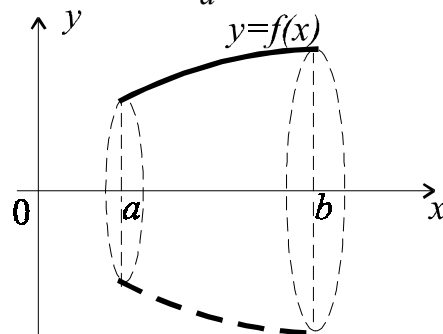


Рис. 4.

5. Невласні інтеграли

Література:

- [1] – § 9, (глава 6, ч. 1);
- [2] – § 10, (глава 5);
- [3] – § 7, (глава 9).

Невласні інтеграли бувають двох типів: з нескінченними границями інтегрування і від розривної функції.

5.1. Невласні інтеграли з нескінченними границями інтегрування

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна при $a \leq x < \infty$, то за означенням

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx.$$

У залежності від того, існує чи не існує границя правої частини рівності, невластний інтеграл називається збіжним або розбіжним відповідно.

Аналогічно

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

5.2. Невласні інтеграли від розривної функції

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна при $a \leq x < b$ і $f(b) = \infty$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Якщо існує границя правої частини формули, то невластний інтеграл називається збіжним. Якщо ця границя не існує, то інтеграл називається розбіжним.

Аналогічно при $f(a) = \infty$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

У випадку, коли $a < c < b$ і $f(c) = \infty$, тобто функція має розрив в точці c , невластний інтеграл записується так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx.$$

Невластний інтеграл буде збіжним, якщо існують границі у правій частині формули.

6. Диференціальні рівняння

Література:

[1] – § 1, пп. 1.1...1.4 (глава 1, ч. 2); § 2, пп. 2.1...2.5 (глава 1б, ч. 2); § 5, пп. 5.9, 5.12;

[2] – § 1...4, § 8 (глава 10);

[3] – § 1...7, § 21, § 22 (глава 13).

Загальний вигляд диференціального рівняння n -го порядку

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1)$$

Порядок диференціального рівняння визначається порядком найвищої похідної, що входить до рівняння.

Загальним розв'язком диференціального рівняння (1) називається функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, яка включає стільки довільних сталих величин C_i ($i = 1, \dots, n$), який порядок рівняння.

Якщо у загальний розв'язок диференціального рівняння (1) підставити відповідні заданим початковим умовам конкретні значення сталих величин C_i , то одержимо частинний розв'язок.

6.1. Основні типи диференціальних рівнянь

1. Рівняння вигляду

$$\int f(x)dx + \int \varphi(y)dy = 0 \quad (2)$$

називається рівнянням з розподіленими змінними. Його розв'язок

$$\int f(x)dx + \int \varphi(y)dy = C \quad \text{або} \quad F(x) + \Phi(y) = C.$$

Рівняння вигляду $f_1(x)\varphi_2(y)dx + f_2(x)\varphi_1(y)dy = 0$ можна привести до рівняння (2), розділивши обидві частини рівності на $f_2(x)\varphi_2(y)$ ($f_2(x) \neq 0, \varphi_2(y) \neq 0$), тобто

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)} dy = 0.$$

2. Рівняння називається однорідним, якщо його можна звести до вигляду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (3)$$

Метод розв'язування: заміна $u = \frac{y}{x}$. Тоді

$$y = ux, \quad y' = u'x + u. \quad (4)$$

Після підстановки (4) у рівняння (3) одержуємо рівняння з розподіленими змінними.

3. Рівняння вигляду $y' + P(x)y = Q(x)$ називається лінійним. Метод розв'язування: заміна $y = u(x)v(x)$. Тоді $y' = u'v + v'u$, де u і v – довільні функції аргумента x .

4. Рівняння вигляду

$$y'' + a_1y' + a_2y = f(x) \quad (5)$$

називається диференціальним лінійним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами a_1 і a_2 .

Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння (5) називається однорідним. Якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння (5) називається неоднорідним.

Загальний розв'язок рівняння (5) можна записати як суму загального розв'язку \bar{y} однорідного рівняння та частинного розв'язку y^* неоднорідного рівняння, тобто $y = \bar{y} + y^*$.

Для розв'язування лінійного однорідного рівняння другого порядку вигляду

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (6)$$

треба скласти характеристичне рівняння

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0, \quad (7)$$

тобто замість y записати букву k , а порядок похідної записати як степінь.

Розв'язавши квадратне рівняння (7), можемо мати три випадки:

а) дискримінант $D > 0$; корені рівняння (7) – дійсні і різні, тобто $k_1 \neq k_2$.

Тоді загальний розв'язок рівняння (6) має вигляд $\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

б) дискримінант $D = 0$; корені характеристичного рівняння (7) – дійсні і рівні, тобто $k_1 = k_2 = k$. Тоді загальний розв'язок рівняння (6) має вигляд $\bar{y} = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$.

в) дискримінант $D < 0$; корені характеристичного рівняння – комплексні, тобто $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння (6) має вигляд $\bar{y} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5) можна підібрати в залежності від вигляду правої частини $f(x)$ рівняння.

Нехай права частина $f(x)$ рівняння (5) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x],$$

де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – деякі многочлени відповідно n -го і m -го степеня. Тоді частинний розв'язок y^* неоднорідного рівняння можна записати у вигляді

$$y^* = e^{\alpha x} [\bar{P}_k(x) \cos \beta x + \bar{Q}_k(x) \sin \beta x] \cdot x^r,$$

де $\bar{P}_k(x)$ і $\bar{Q}_k(x)$ – повні многочлени з невизначеними коефіцієнтами ($k = \max\{n; m\}$); $r = 0$, якщо серед коренів характеристичного рівняння немає таких, які б дорівнювали $\alpha \pm i\beta$; $r = 1$, якщо числа $\alpha \pm i\beta$ є коренями характеристичного рівняння.

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 2

ЗАДАЧА 1

Показати, що функція $z = \sqrt{\frac{x}{y}}$ задовольняє дане рівняння

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Розв'язання. Запишемо функцію у вигляді $z = x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}$. Знайдемо її частинні похідні першого і другого порядків:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}; & \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} y^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}}; & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Підставимо знайдені похідні у задане рівняння:

$$\begin{aligned} x^2 \cdot \left(-\frac{1}{4} y^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}}\right) - y^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{5}{2}}\right) - 2y \left(-\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}}\right) &= \\ = -\frac{1}{4} y^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} &= -x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Отже, задана функція задовольняє рівняння.

ЗАДАЧА 2

Знайти найбільше і найменше значення функції

$$z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$$

в області $D: \{x=0; y=0; x+y=-5\}$. Показати область D на рисунку.

Розв'язання. Накреслимо область D на площині xOy (рис 5). Вершини трикутника мають координати: $O(0;0)$, $A(-5;0)$, $B(0;-5)$.

а) Точки екстремуму в області D знайдемо із системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 3 = 0; \\ -x + 4y + 2 = 0; \end{cases} \Rightarrow x = -2; y = -1 \Rightarrow M_1(-2; -1).$$

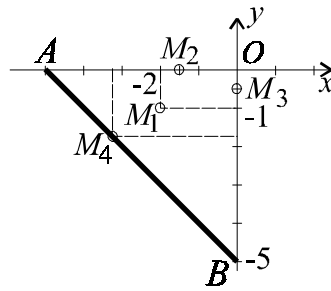


Рис. 5.

Точка екстремуму $M_1(-2; -1)$ знаходиться всередині області D , тому знайдемо значення функції z в цій точці:

$$z(M_1) = (-2)^2 - (-2)(-1) + 2(-1)^2 + 3(-2) + 2(-1) + 1 = -3.$$

б) Знаходимо найбільше та найменше значення функції на границях області D . Для цього розглядаємо кожен ділянку границі окремо.

Рівняння границі (OA) : $y=0$. Підставимо замість y його значення у функцію z . Одержимо функцію однієї змінної x , тобто $z(x; y=0) = z(x) = x^2 + 3x + 1$. При цьому $-5 \leq x \leq 0$. Точки екстремуму знаходимо за означенням, тобто

$$\frac{dz}{dx} = 0; \Rightarrow 2x + 3 = 0; \Rightarrow x = -1,5.$$

Точка $M_2(-1,5; 0)$ лежить на границі OA . Значення функції в цій точці $z(M_2) = (-1,5)^2 + 3 \cdot (-1,5) + 1 = -1,25$.

Рівняння границі (OB) : $x=0$. Тоді $z(x=0; y) = z(y) = 2y^2 + 2y + 1$ ($-5 \leq y \leq 0$). Знаходимо точки екстремуму:

$$\frac{dz}{dy} = 0; \Rightarrow 4y + 2 = 0; \Rightarrow y = -0,5.$$

Точка $M_3(0; -0,5)$ лежить на границі (OB) . Значення функції в цій точці $z(M_3) = 2(-0,5)^2 + 2(-0,5) + 1 = 0,5$.

Рівняння границі (AB) : $x + y = -5$ або $y = -5 - x$. Підставимо цей вираз у задану функцію $z = f(x, y)$:

$$z(x, y = -5 - x) = x^2 - x(-5 - x) + 2(-5 - x)^2 + 3x + 2(-5 - x) + 1$$

або

$$z(x) = 4x^2 + 26x + 41.$$

Знаходимо точки екстремуму на границі (AB) :

$$\frac{dz}{dx} = 8x + 26, \Rightarrow 4x + 13 = 0 \Rightarrow x = -3,25.$$

Тоді $y = -5 + 3,25 = -1,75$. Критична точка $M_4(-3,25; -1,75)$. Значення функції в точці M_4 : $z(M_4) = (-3,25)^2 - (-3,25) \cdot (-1,75) + 2 \cdot (-1,75)^2 + 3 \cdot (-3,25) + 2 \cdot (-1,75) + 1 = -1,25$.

Знаходимо значення функції в точках $A(-5; 0)$, $O(0; 0)$, $B(0; -5)$:

$$z(A) = 11; \quad z(O) = 1; \quad z(B) = 41.$$

Із знайдених в точках $M_1, M_2, M_3, M_4, A, B, O$ найбільшим є значення функції в точці B : $\max z(x; y) = 41$, а найменшим – в точці M_1 $\min z(x; y) = -3$

ЗАДАЧА 3

Знайти інтеграли:

$$\text{а) } \int \frac{e^{3\arctg x}}{1+x^2} dx; \quad \text{б) } \int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+3}}; \quad \text{в) } \int x \ln x dx; \quad \text{г) } \int \frac{2x-1}{x^2-6x+10} dx; \quad \text{д) } \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx.$$

Розв'язання.

а) зробимо заміну: $3\arctg x = t$ тоді, після диференціювання обох частин виразу, одержимо

$$\frac{3}{1+x^2} dx = dt \quad \text{або} \quad \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{3} dt.$$

Остаточо маємо

$$\int \frac{e^{3\arctg x}}{1+x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} 3\arctg x = t; \\ \frac{3}{1+x^2} dx = dt; \end{array} \right. \left. \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{3} dt \right\} = \int e^t \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int e^t dt = \frac{1}{3} e^t + C = \\ = \frac{1}{3} e^{3\arctg x} + C.$$

$$\text{б) } \int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+3}} = \left\{ \begin{array}{l} 2x^2+3 = t; \\ 4xdx = dt; \end{array} \right. \left. xdx = \frac{1}{4} dt \right\} = \int \frac{1}{4} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{4} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \\ = \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2} \sqrt{2x^2+3} + C.$$

в) цей інтеграл належить до типу, що спрощується методом інтегрування частинами (правило 2)

$$\int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x; \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx; \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \\ = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

г) у знаменнику виділяємо повний квадрат

$$x^2 - 6x + 10 = x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 10 = (x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2) - 3^2 + 10 = (x-3)^2 + 1.$$

Тоді

$$\int \frac{2x-1}{(x-3)^2+1} dx = \left\{ \begin{array}{l} x-3=t; \quad x=t+3 \\ dx=dt; \end{array} \right\} = \int \frac{2 \cdot (t+3)-1}{t^2+1} dt = \int \frac{2t+5}{t^2+1} dt =$$

$$= \int \frac{2t}{t^2+1} dt + \int \frac{5}{t^2+1} dt = \ln|t^2+1| + 5 \operatorname{arctg} t + C = \ln|(x-3)^2+1| + 5 \operatorname{arctg}(x-3) + C.$$

д) у цьому інтегралі спочатку зробимо перетворення: $\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x = (1-\cos^2 x) \sin x$.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)}{\sqrt{\cos x}} \cdot \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\} = -\int \frac{1-t^2}{\sqrt{t}} dt =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int \frac{t^2}{\sqrt{t}} dt = -\int t^{-\frac{1}{2}} dt + \int t^{\frac{3}{2}} dt = -\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = -2\sqrt{\cos x} + \frac{2}{5}(\sqrt{\cos x})^5 + C.$$

ЗАДАЧА 4

Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y = 2x - x^2$, $y = -x$.

Розв'язання. Зведемо рівняння параболи до канонічного вигляду

$$y = -(x^2 - 2x + 1) + 1 \quad \text{або} \quad y - 1 = -(x - 1)^2.$$

Вершина параболи знаходиться в точці $A(1; 1)$, гілки параболи напрямлені донизу. Точки перетину з віссю Ox знайдемо із системи рівнянь

$$\begin{cases} y = 2x - x^2; \\ y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - x^2 = 0; \\ y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0; \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Точки $O(0; 0)$ і $M(2; 0)$ – точки перетину параболи з віссю Ox .

Пряма $y = -x$ – бісектриса другого і четвертого координатних кутів.

Знайдемо точки перетину заданих ліній:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2; \\ y = -x; \end{cases} \Rightarrow 2x - x^2 + x = 0, \Rightarrow 3x - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 3.$$

Тоді $y_1 = 0$; $y_2 = -3$. Точки $O(0;0)$ і $N(3;-3)$ – точки перетину двох заданих ліній.

Накреслимо фігуру на площині xOy (рис. 6).

Площу фігури, яка обмежена лініями, знаходимо за формулою

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 + x) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{3 \cdot (3)^2}{2} - \frac{(3)^3}{3} - 0 =$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{18}{2} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ (кв.од.)}$$

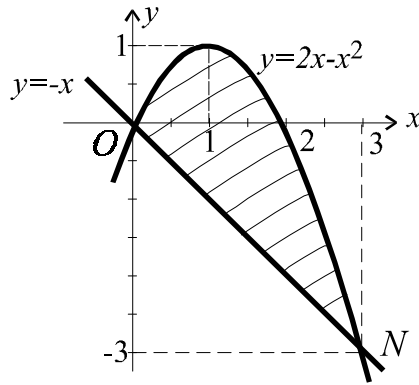


Рис. 6.

ЗАДАЧА 5

Обчислити невластні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int_1^{\infty} \frac{\ln^2 x dx}{x}$; б) $\int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^3}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_1^{\infty} \frac{\ln^2 x dx}{x} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{\ln^2 x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \ln^2 x d(\ln x) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln^3 x}{3} \right) \Big|_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{\ln^3 b}{3} - \frac{\ln^3 1}{3} \right] = \infty. \end{aligned}$$

Висновок: невластний інтеграл по необмеженій області розбігається.

$$\begin{aligned} \text{б) } \int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^3} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{2+\varepsilon}^3 \frac{dx}{(x-2)^3} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\left(-\frac{1}{2(x-2)^2} \right) \Big|_{2+\varepsilon}^3 \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{2(3-2)^2} + \frac{1}{2[(2+\varepsilon-2)]^2} \right] = -\frac{1}{2} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon^2} = -\frac{1}{2} + \infty = \infty. \end{aligned}$$

Висновок: інтеграл від розривної функції (в точці $x=2$ функція невизначена) розбігається.

ЗАДАЧА 6

а) Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$ye^{2x} dx + (1 + e^{2x}) dy = 0.$$

Розв'язання. Задане рівняння – рівняння з відокремлюваними змінними. Для того щоб відокремити змінні, розділимо обидві частини рівняння на $y(1 + e^{2x})$ і одержимо

$$\frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx + \frac{dy}{y} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx = -\frac{dy}{y}.$$

Інтегруємо обидві частини рівняння

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} 1+e^{2x} = t \\ 2e^{2x} = dt \\ e^{2x} = \frac{dt}{2} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln t = \frac{1}{2} \ln |1+e^{2x}|;$$

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx = -\ln y; \quad \frac{1}{2} \ln |1+e^{2x}| + \frac{1}{2} \ln C = -\ln y;$$

$$\frac{1}{2} \ln |C(1+e^{2x})| = -\ln y; \quad \ln |C(1+e^{2x})|^{\frac{1}{2}} = \ln y^{-1};$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{C(1+e^{2x})}}.$$

б) Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 4y' + 4y = 3\sin 2x; \quad y(0) = 9; \quad y'(0) = 1$$

Розв'язання. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння складається з загального розв'язку однорідного і частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Спочатку розв'язуємо однорідне рівняння, тобто відкидаємо його праву частину ($f(x) = 0$): $y'' - 4y' + 4y = 0$. Складаємо характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 4 = 0$. Корені характеристичного рівняння $k_1 = k_2 = 2$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння y має вигляд

$$\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Знаходимо частинний розв'язок неоднорідного рівняння методом підбору у вигляді $y^* = A \cos 2x + B \sin 2x$, де A і B – невизначені коефіцієнти. Знаходимо першу і другу похідні для y^* ,

$$(y^*)' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x; \quad (y^*)'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

Підставляємо y^* , $(y^*)'$, $(y^*)''$ у задане рівняння і визначаємо коефіцієнти A і B :

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 4(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + 4(A \cos 2x + B \sin 2x) \equiv 3 \sin 2x, \\ 8A \sin 2x - 8B \cos 2x \equiv 3 \sin 2x.$$

Зробимо порівняння коефіцієнтів при $\cos 2x$ і $\sin 2x$ ліворуч і праворуч від знака « \equiv »:

$$\begin{array}{l} \sin 2x \mid 8A = 3; \quad A = 3/8. \\ \cos 2x \mid -8B = 0; \quad B = 0. \end{array}$$

Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд $y^* = \frac{3}{8} \sin 2x$.

Запишемо остаточно загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{3}{8} \sin 2x.$$

Знайдемо частинний розв'язок, що відповідає початковим умовам. Для цього спочатку знайдемо першу похідну від загального розв'язку

$$y' = 2C_1 e^{2x} + C_2 (e^{2x} + 2x e^{2x}) + \frac{6}{8} \cos 2x,$$

а тепер, скориставшись початковими умовами, запишемо систему рівнянь і розв'яжемо її відносно невідомих C_1 і C_2 :

$$\begin{cases} y(0) = C_1; \\ y'(0) = 2C_1 + C_2 + \frac{3}{4}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 = C_1; \\ 1 = 2C_1 + C_2 + \frac{3}{4}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 9; \\ C_2 = -17\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = 9e^{2x} - 17\frac{3}{4}xe^{2x} + \frac{3}{8}\sin 2x.$$

ТАБЛИЦЯ ВАРІАНТІВ

Номер варіанта відповідає двом останнім цифрам шифру студента. Номери задач варіанта вибираються з таблиці, що наведена нижче. Наприклад, для варіанта 01 треба розв'язати задачі 1.1, 2.15, 3.27, 4.2, 5.5, 6.11.

Номер варіанта	Номери задач					
	1	2	3	4	5	6
01	1	15	27	2	5	11
02	2	16	26	4	6	14
03	3	17	25	6	7	17
04	4	18	24	8	8	20
05	5	19	23	10	9	23
06	6	20	22	12	10	26
07	7	21	21	14	11	29
08	8	22	20	16	12	1
09	9	23	19	18	13	4
10	10	24	18	20	14	7
11	11	25	17	22	3	10
12	12	26	16	24	2	13
13	13	27	15	26	1	16
14	14	14	1	27	27	19
15	15	13	2	25	26	22
16	16	12	3	23	25	25
17	17	11	4	21	24	28
18	18	10	5	19	23	8
19	19	9	6	17	20	11
20	20	8	7	15	21	14
21	21	7	8	13	22	11
22	22	6	9	11	19	10
23	23	5	10	9	18	12
24	24	4	11	7	16	28
25	25	3	12	5	17	12
26	26	2	13	3	9	17
27	27	11	14	12	8	15
28	12	27	1	17	7	10
29	13	26	2	18	6	13
30	14	25	3	19	5	16

Номер варіанта	Номери задач					
	1	2	3	4	5	6
31	15	24	4	20	4	19
32	16	23	5	21	3	1
33	17	22	6	22	12	4
34	18	21	7	23	1	7
35	19	20	8	24	27	10
36	20	19	9	25	26	13
37	21	18	10	26	25	16
38	22	17	11	27	22	19
39	23	16	12	16	23	22
40	24	15	13	14	24	25
41	25	14	20	12	21	28
42	26	13	19	10	20	30
43	27	12	18	8	19	27
44	28	1	17	6	18	24
45	11	2	16	4	17	21
46	10	3	15	2	16	18
47	9	4	14	15	18	15
48	8	5	21	13	14	12
49	7	11	22	11	13	9
50	16	10	23	9	12	6
51	5	19	24	7	11	3
52	4	8	25	5	10	1
53	3	7	26	1	17	12
54	12	6	27	3	9	3
55	1	10	17	21	11	4
56	20	11	15	3	13	5
57	19	12	13	5	27	6
58	18	13	11	7	23	2
59	17	14	9	13	15	3
60	16	27	7	11	17	4
61	15	26	5	9	19	11
62	14	25	3	15	21	12
63	12	24	1	17	5	13
64	12	23	16	19	3	10
65	11	15	2	21	1	12
66	10	16	6	23	25	14

Номер варіанта	Номери задач					
	1	2	3	4	5	6
67	9	17	12	25	26	16
68	8	18	14	27	24	18
69	7	19	8	29	16	20
70	6	20	18	2	18	22
71	5	21	22	6	17	29
72	4	22	20	8	18	30
73	3	9	21	10	19	16
74	2	8	23	12	20	14
75	1	7	24	14	21	12
76	21	6	25	16	22	10
77	22	5	26	18	23	8
78	23	4	27	20	24	6
79	24	3	29	22	25	4
80	25	2	30	24	26	2
81	26	1	29	26	27	15
82	27	30	28	28	2	13
83	28	29	25	30	4	11
84	29	28	19	5	13	9
85	30	27	4	7	5	7
86	14	26	10	9	28	5
87	13	25	1	11	17	1
88	12	23	2	13	30	3
89	15	21	3	15	29	1
90	17	24	4	17	12	3
91	18	19	5	19	10	5
92	19	22	6	21	5	7
93	21	17	7	23	1	13
94	23	14	8	25	2	11
95	25	11	9	27	3	9
96	27	8	10	26	4	15
97	18	5	11	28	7	17
98	16	2	15	29	5	19
99	12	24	17	30	2	21
00	10	1	19	4	30	29

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2

ЗАДАЧА 1.1 – 1.30

Показати, що функція $z = f(x, y)$ задовольняє дане рівняння.

$$1.1. \quad z = y \ln(x^2 - y^2); \quad \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

$$1.2. \quad z = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}; \quad x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{y}.$$

$$1.3. \quad z = x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

$$1.4. \quad z = \ln(x^2 + y^2); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$1.5. \quad z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$1.6. \quad z = \ln(x^2 + xy + y^2); \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

$$1.7. \quad z = xy + x e^{\frac{y}{x}}; \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

$$1.8. \quad z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}); \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}.$$

$$1.9. \quad z = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}; \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} z.$$

$$1.10. \quad z = e^{\frac{x}{y^2}}; \quad 2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$1.11. \quad z = x^y; \quad \frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

$$1.12. \quad z = e^{\frac{x}{y}} \ln y; \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{\ln y}.$$

$$1.13. \quad z = \pi \sqrt{\frac{x}{y}}; \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$1.14. \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 1.$$

- 1.15. $z = \frac{xy}{x-y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x-y}$.
- 1.16. $z = \ln(e^x + e^y)$; $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.
- 1.17. $z = e^x \cos y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
- 1.18. $z = e^{xy}$; $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
- 1.19. $z = x \ln \frac{y}{x}$; $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$.
- 1.20. $z = \ln \frac{x}{y} + x^3 - y^3$; $z \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 3(x^3 - y^3)$.
- 1.21. $z = x^y$; $y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y \ln x) \frac{\partial z}{\partial x}$.
- 1.22. $z = e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right)$; $\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{2} e^x \sin^2 \frac{y}{2}$.
- 1.23. $z = x^y y^x$; $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = (x + y + \ln z)z$.
- 1.24. $z = \frac{xy}{x+y}$; $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.
- 1.25. $z = e^{xy}$; $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2yx \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0$.
- 1.26. $z = \frac{y}{x}$; $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
- 1.27. $z = \frac{x^2 + y^2}{x-y}$; $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2 \frac{x+y}{x-y}$.
- 1.28. $z = \arcsin \frac{x}{x+y}$; $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
- 1.29. $z = (x^2 + y^2) \operatorname{tg} \frac{x}{y}$; $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.
- 1.30. $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$; $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$.

ЗАДАЧА 2.1 – 2.30

Знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x, y)$ в області D . Показати область D на рисунку.

- | | |
|---|--|
| 2.1. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$; | $D: \{x + y + 1 = 0, x = -3, y = 0\}$. |
| 2.2. $z = 4x^2 + 9y^2 - 4x - 6y + 3$; | $D: \{x = 0, y = 0, x + y = 1\}$. |
| 2.3. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$; | $D: \{x = -1, y = -1, x + y = 1\}$. |
| 2.4. $z = 10 + 2xy - x^2$; | $D: \{y = 4 - x^2, y = 0\}$. |
| 2.5. $z = 4x + 2y + 4x^2 + y^2 + 6$; | $D: \{x = 0, y = 0, x + y + 2 = 0\}$. |
| 2.6. $z = (x^3 - 3x)(2 - y^3)$; | $D: \{-2 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$. |
| 2.7. $z = 2xy$; | $D: \{x^2 + y^2 \leq 9\}$. |
| 2.8. $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$; | $D: \{x = 1, y = 0, y = x\}$. |
| 2.9. $z = x^2 - xy + y^2$; | $D: \{x^2 + y^2 \leq 4\}$. |
| 2.10. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$; | $D: \{x = 1, y = 1, x + y = 1\}$. |
| 2.11. $z = -xy$; | $D: \{x = 0, y = 1, y = x\}$. |
| 2.12. $z = xy(4 - x - y)$; | $D: \{x = 1, y = 0, x + y = 6\}$. |
| 2.13. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$; | $D: \{y = x + 1, y = 0, x = 3\}$. |
| 2.14. $z = x^2 + 2xy - 10$; | $D: \{y = x^2 - 4, y = 0\}$. |
| 2.15. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 2x + 2y$; | $D: \{y = x + 2, y = 0, x = 2\}$. |
| 2.16. $z = y^2 - 2xy - x^2 + 4x + 1$; | $D: \{x + y + 1 = 0, y = -3, x = 0\}$. |
| 2.17. $z = x^2 + xy - 7$; | $D: \{y = 4x^2 - 4, y = 0\}$. |
| 2.18. $z = 2x^2 + 2xy - \frac{y^2}{2} - 4x$; | $D: \{y = 2x, y = 2, x = 0\}$. |
| 2.19. $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$; | $D: \{x + y + 2 = 0, x = 0, y = 0\}$. |
| 2.20. $z = x^2 y$; | $D: \{y = 1 - x^2, y = 0\}$. |
| 2.21. $z = 4 - 2x^2 - y^2$; | $D: \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. |
| 2.22. $z = xy$; | $D: \left\{ \begin{array}{l} \text{трикутник з вершинами} \\ \text{O(0,0); B(2,0); C(0,3)} \end{array} \right\}$. |
| 2.23. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$; | $D: \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{x^2}{3}, \\ y = 3 \end{array} \right\}$. |

- 2.24. $z = 1 + xy^2$; $D: \{0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2\}$.
- 2.25. $z = x^2 - 2y^2 + 4$; $D: \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- 2.26. $z = y^2 + 2xy - x^2 - 4y$; $D: \{y = x + 1, y = 0, x = 3\}$.
- 2.27. $z = -x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y$; $D: \{y = x + 2, y = 0, x = 2\}$.
- 2.28. $z = 4y + 2x + 4y^2 + x^2 + 6$; $D: \{x = 0, y = 0, x + y + 2 = 0\}$.
- 2.29. $z = 5y^2 - 3xy + x^2 + 4$; $D: \{x = -1, y = -1, x + y = 1\}$.
- 2.30. $z = 4y^2 + 9x^2 - 4y - 6x + 3$; $D: \{x = 0, y = 0, x + y = 1\}$.

ЗАДАЧІ 3.1 – 3.30

Знайти первісну.

- 3.1. а) $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos^2 3x}} dx$; б) $\int x \cos 5x dx$.
- 3.2. а) $\int \frac{\cos x}{2 \sin x - 5} dx$; б) $\int \frac{\ln(2x+1)}{x} dx$.
- 3.3. а) $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}} dx$; б) $\int x e^{3x-5} dx$.
- 3.4. а) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+5 \cos x}} dx$; б) $\int (x+1) \cos 2x dx$.
- 3.5. а) $\int e^{7x+1} dx$; б) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$.
- 3.6. а) $\int \frac{x^2 dx}{3x^3 - 5}$; б) $\int (2-x) \cos 3x dx$.
- 3.7. а) $\int \frac{dx}{9x^2 - 8}$; б) $\int x \ln(x-1) dx$.
- 3.8. а) $\int x \cos(x^2 + 1) dx$; б) $\int (2x+1) \operatorname{arctg} x dx$.
- 3.9. а) $\int e^{-3x^2} x dx$; б) $\int \operatorname{arctg}(2x-1) dx$.
- 3.10. а) $\int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}$; б) $\int \arcsin x dx$.
- 3.11. а) $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$; б) $\int \operatorname{arctg}(4x-1) dx$.
- 3.12. а) $\int \frac{x dx}{(x^2+4)^6}$; б) $\int \ln(x+4) dx$.

- 3.13. a) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$; б) $\int (x+5)\sin 3x dx$.
- 3.14. a) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg}x+1)}$; б) $\int e^{-3x}(2-9x)dx$.
- 3.15. a) $\int \frac{\cos 3x}{4+\sin 3x} dx$; б) $\int (3x-2)\cos 5x dx$.
- 3.16. a) $\int \frac{\sin x}{3\sqrt{3+\cos x}} dx$; б) $\int e^{-2x}(4x-3)dx$.
- 3.17. a) $\int \frac{x+\operatorname{arctg}x}{1+x^2} dx$; б) $\int (2-4x)\sin 2x dx$.
- 3.18. a) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{3+2\cos x}} dx$; б) $\int xe^{-3x} dx$.
- 3.19. a) $\int \frac{\sqrt{4+\ln x}}{x} dx$; б) $\int (4x-2)\cos 2x dx$.
- 3.20. a) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{(1+x^2)} dx$; б) $\int (5x-2)e^{3x} dx$.
- 3.21. a) $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$; б) $\int x^2 \ln x dx$.
- 3.22. a) $\int x^2 \sqrt{x^3+5} dx$; б) $\int (x+4)\cos x dx$.
- 3.23. a) $\int (x^2-3x)^5 (2x-3) dx$; б) $\int (3x+5)\sin 8x dx$.
- 3.24. a) $\int \frac{2-x^4}{1+x^2} dx$; б) $\int x^2 e^{8x} dx$.
- 3.25. a) $\int x^3 (1-2x^4)^3 dx$; б) $\int \ln x dx$.
- 3.26. a) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$; б) $\int (x+1)e^x dx$.
- 3.27. a) $\int x(x^2+1)^{\frac{3}{2}} dx$; б) $\int (x^2+2x+3)\cos x dx$.
- 3.28. a) $\int \frac{xdx}{x^2-1}$; б) $\int e^{2x} \cos x dx$.
- 3.29. a) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}}$; б) $\int (x+5)\operatorname{arctg}x dx$.

3.30. а) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x}}$;

б) $\int x^2 \arctg x dx$.

ЗАДАЧІ 4.1 – 4.30

Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями:

4.1. $y = \sqrt{x}$; $x = 9$; $y = 0$.

4.2. $y = 2x^2 + 2x + 2$; $y = 0$, $x = 0$, $x = -3$.

4.3. $y = \frac{1}{x}$; $y = x$; $x = 3$.

4.4. $y = x^2$; $4x - y = 0$.

4.5. $y = -\frac{1}{x}$; $y = 0$; $x = -1$; $x = -2$.

4.6. $y = \ln x$; $x = 0$; $y = 1$; $y = -1$.

4.7. $y = \sin x$; $x = \pi$; $y = -x$.

4.8. $y = x^2 - 2x + 3$; $y = 3x - 1$; $x = 0$.

4.9. $y = 4 - x^2$; $y = 0$.

4.10. $y = 1 + e^x$; $x = 0$; $x = -4$; $y = 0$.

4.11. $y = 4x^2$; $y = x^2 + 3$.

4.12. $y = x^2 - 3x$; $y = x$.

4.13. $y = e^x$; $y = e$; $x = -1$.

4.14. $y = -x$; $y = 2 - x$; $y = -4$; $y = 3$.

4.15. $y = x^2 + 2$; $x + y = 2$; $x = 2$.

4.16. $y = -x^2 - 7x + 10$; $y = 0$.

4.17. $y = 4 - x^2$; $2x - y + 1 = 0$.

4.18. $y = 6 - x^2$; $y = 0$.

4.19. $y = 3^x$; $y = 2^x$; $x = 1$.

4.20. $y = \frac{1}{x}$; $x = e$; $x = e^2$; $y = 0$.

4.21. $y = \frac{1}{x^2}$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 2$.

4.22. $y = e^x$; $y = e^{-x}$; $x = 1$.

4.23. $y = x^2$; $y = e^{-x}$; $x = 1$.

4.24. $y = -x^2 + 7x - 10$; $x = 2$; $x = 3$; $y = 0$.

4.25. $y = x$; $y = 1$; $y = 4$; $x = 0$.

$$4.26. y = 2x - x^2; \quad y = 0.$$

$$4.27. y = e^x; \quad x + y = 2; \quad x = 0; \quad y = 0.$$

$$4.28. y = x^2; \quad y = \sqrt{x}.$$

$$4.29. y = \frac{1}{x}; \quad y = 1; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = 2.$$

$$4.30. y = x^2; \quad 4x - y = 0.$$

ЗАДАЧІ 5.1–5.30

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність.

$$5.1. \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx.$$

$$5.2. \int_0^{\infty} \frac{dx}{4 + x^2}.$$

$$5.3. \int_0^{\infty} \frac{x-2}{x^2+1} dx.$$

$$5.4. \int_0^{\infty} x \sin 2x dx.$$

$$5.5. \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{1+4x^4}.$$

$$5.6. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$5.7. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^5 x}.$$

$$5.8. \int_0^{\infty} e^{-4x} dx.$$

$$5.9. \int_0^{\infty} x e^{-x} dx.$$

$$5.10. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$5.11. \int_0^{\infty} \frac{4x^3 dx}{x^4+1}.$$

$$5.12. \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{x\sqrt{1+\ln x}}}.$$

$$5.13. \int_0^{\infty} e^{\sqrt{x}} dx.$$

$$5.14. \int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{x^2+1} dx.$$

$$5.15. \int_{-\infty}^0 x e^{-3x} dx.$$

$$5.16. \int_{-\infty}^e x e^{-x} dx.$$

$$5.17. \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx.$$

$$5.18. \int_0^{\infty} x e^{-2x} dx.$$

$$5.19. \int_{-\infty}^0 x e^{5x} dx.$$

$$5.20. \int_0^{\infty} x e^{x^2} dx.$$

$$5.21. \int_0^{\infty} \frac{dx}{36+x^2}.$$

$$5.22. \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{x\sqrt{2+\ln x}}}.$$

$$5.23. \int_0^{\infty} x e^{-x} dx.$$

$$5.24. \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$5.25. \int_0^{\infty} x e^{-2x} dx.$$

$$5.26. \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

$$5.27. \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10}.$$

$$5.28. \int_4^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}.$$

$$5.29. \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$5.30. \int_1^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx.$$

ЗАДАЧІ 6.1 – 6.30

Знайти загальний або частинний розв'язок диференціального рівняння.

- 6.1. а) $xydx + (x + 1)dy = 0$;
 б) $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-4,5x}$; $y(0) = 3$; $y'(0) = -5,5$.
- 6.2. а) $y' = \frac{xy + y^2}{x^2}$;
 б) $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 3,2$.
- 6.3. а) $x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$;
 б) $y'' \pm 4y' - 12y = 8\sin 2x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.
- 6.4. а) $xy' = y + 2x - 2\sqrt{xy - y^2}$;
 б) $y'' - y' = 2(1 - x)$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$.
- 6.5. а) $x dx - \sqrt{1 - x^2} dy = 0$;
 б) $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$; $y(0) = \frac{4}{3}$; $y'(0) = \frac{1}{27}$.
- 6.6. а) $y' + \frac{y}{x} = xe^{\frac{x}{2}}$;
 б) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.
- 6.7. а) $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$;
 б) $2y'' + y' - y = 2e^x$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.
- 6.8. а) $xy^2 dy = (x^3 + y^3)dx$;
 б) $y'' - 2y' + 2y = 2x$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 0$.
- 6.9. а) $x dy - (x + y)dx = 0$;
 б) $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.
- 6.10. а) $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$;
 б) $2y'' + 5y' = 29 \cos x$; $y(0) = 3$; $y'(0) = 0$.
- 6.11. а) $xy' - 2y = 2x^4$;
 б) $y'' + 4y' - 12y = 8 \sin x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.
- 6.12. а) $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0$;
 б) $y'' + 4y' = e^{-2x}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.
- 6.13. а) $y' + 3\frac{y}{x} = \frac{2}{x^3}$;
 б) $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

- 6.14. a) $y' = e^x$;
 б) $y'' + 5y' + 6y = 12\cos 2x$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 3$.
- 6.15. a) $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$;
 б) $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.
- 6.16. a) $y' - 4\frac{y}{x} = \frac{1}{x}$;
 б) $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.
- 6.17. a) $(x^2 - 1)y' = 2xy^2$;
 б) $y'' - 4y' = 6x^2 + 1$.
- 6.18. a) $x^2y' = 1 + 2y$
 б) $y'' - 2y' + y = 16e^x$.
- 6.19. a) $\frac{dx}{y+2} = \frac{dy}{4-x}$;
 б) $y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}$.
- 6.20. a) $dx - \sqrt{1-x^2} \cdot ydy = 0$;
 б) $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}$.
- 6.21. a) $y' = \frac{y}{x-2}$;
 б) $y'' - 3y' + 2y = x^2 - x + 1$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 3$.
- 6.22. a) $xyy' = 1 - x^2$;
 б) $y'' - 4y' + 4y = x^2$.
- 6.23. a) $xy' = y^3$;
 б) $y'' + 2y' + y = e^{2x}$.
- 6.24. a) $y' = \frac{y-3}{x-1}$;
 б) $y'' - y' + y = x^3 + 6$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.
- 6.25. a) $y' = \frac{4+y}{x}$;
 б) $y'' + y = \cos x$.
- 6.26. a) $\frac{dy}{dx} - \frac{y^2}{x^3} = 0$;
 б) $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$.

- 6.27. а) $y' = y \operatorname{tg} x$;
 б) $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$.
- 6.28. а) $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x-9}$;
 б) $y'' + 4y = \sin x$.
- 6.29. а) $y' = x\sqrt{y}$;
 б) $y'' + 2y' + y = e^x + e^{-x}$.
- 6.30. а) $y' + y - e^x = 0$;
 б) $y'' - y' = 2x - 1 - 3e^x$.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. Ч. 1. – К.: Техніка, 2000.
2. Запорожец. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1996.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления, ч. I: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985.

ЗМІСТ

Основні рекомендації студенту щодо виконання контрольної роботи	3
Основні означення та формули	4
Зразок виконання контрольної роботи № 2	11
Таблиця варіантів	18
Контрольна робота № 2	21
Бібліографічний список	30